

Voraussetzungen

- Bisektionsverfahren
- Sekantenverfahren

Einführung

Wie das Bisektionsverfahren und das Sekantenverfahren versucht das Newton-Verfahren die Lösung einer Funktion durch geometrische Überlegungen anzunähern. Der Verlust der genauen Aussage über die Lage der Nullstelle der Funktion wird durch die wesentlich einfachere Berechnung der Annäherung wieder wett gemacht. Die Vereinfachung wird dabei durch die Linearisierung der Ausgangsfunktion erreicht. Das heißt die Ausgangsfunktion wird in einem interessantem Intervall (Bisektions- und Sekantenverfahren) beziehungsweise an einer interessanten Stelle (Newton-Verfahren) durch eine korrespondierende Gerade ersetzt. Anhand der Geraden werden dann Aussagen über die Lage der Nullstelle gemacht. Jede Aussage führt zu einer Konkretisierung des interessanten Intervals bzw. der interessanten Stelle, sodass eine weitere Gerade ermittelt werden kann, die eine genauere Aussage über die Lage der Nullstelle geben kann. Da also das Ergebnis einer Approximation in die nächste Approximation eingeht und mit jedem iterativem Schritt das Ergebnis genauer wird, handelt es sich bei allen drei Vorgehen um Verfahren.

Die Rechnung des Bisektionsverfahren ist von der Durchführung her am trivialsten. Die korrespondierenden Geraden jedes Iterationsschrittes haben jedoch mit der Ausgangsfunktion wenig gemein und die Annäherung an die Nullstelle ist in mancher hinsicht etwas willkürlich. So kann in einem Iterationsschritt der ermittelte Intervallmittelpunkt der Nullstelle sehr nahe sein, während er in den nachfolgenden wieder weit entfernt liegt. Das Sekantenverfahren bedarf einen erhöhten Rechenaufwand gegenüber dem Bisektionsverfahren, die korrespondierenden Geraden nähern die Ausgangsfunktion im gegebenen Intervall jedoch deutlich besser an, als die Geraden des Bisektionsverfahrens. Jeder Iterationsschritt bedeutet dabei eine kontinuierliche Verbesserung der Approximation und zudem eine höhere Genauigkeit, also bessere Approximation in weniger Iterationsschritten. Das Newton-Verfahren bedient sich der Tangenten der Funktion an interessanten Punkten, welche das Kurvenbild der Funktion an einem Punkt am besten approximiert. Die notwendige Ermittlung der Ableitung der Funktion erhöht zwar wieder den Rechenaufwand, jedoch ist das Newton-Verfahren wiederum sehr viel genauer als das Sekantenverfahren. Mit erhöhtem Rechenaufwand bewegen wir uns zwar wieder auf die Ausgangsfunktion zu, approximieren aber die Nullstelle in weniger Schritten genauer. Das Newton-Verfahren bietet dabei in der Praxis den besten Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Genauigkeit. Das soll jedoch nicht heißen, dass das Bisektionsverfahren sowie das Sekantenverfahren ohne Bedeutung sind. Wie wir später noch sehen werden, profitiert das Newton-Verfahren von einer guten Anfangsnäherung, welche mittels der beiden einfacheren Verfahren schnell zu genüge zu gewinnen ist.

Newton-Verfahren für Gleichungen

Das Newton-Verfahren startet bei einer beliebigen Startnäherung x_0 von $f(x) = 0$. Voraussetzung für das Gelingen des Verfahren ist, dass die Funktion f genügend nahe der Nullstelle differenzierbar ist, als auch dass die Funktion an x_0 nicht parallel zur Abszisse verläuft, also $f'(x) \neq 0$. An der Startnäherung approximieren wir die Funktion f durch ihre Tangente:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Diesen Vorgang nennen wir Linearisierung.

Die erste errechnete Näherung p_1 erhalten wir, indem wir die Approximation mit der Abszisse schneiden:

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \quad [10] \quad f'(x_0) \cdot (x - x_0) = -f(x_0) \quad [10] \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Die neue Näherung x_1 ist jedoch viel genauer als unsere Startnäherung x_0 . Benutzen wir x_1 als neue Startnäherung und wiederholen das Verfahren iterativ, dann erreichen wir mit jedem Durchlauf eine sehr viel genauere Approximation der Nullstelle der Funktion.

Die iterative Anwendung ausgehend vom Startwert ist allgemein bekannt als das Newton-Verfahren.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Anstatt einer Gleichung $f(x)$ von einer Variablen haben wir nun einen Vektor von n Gleichungen mit n Variablen,

welcher wieder einen n -Zeiligen Vektor ausgibt: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für eine einfache Gleichung wurde nach einem x gesucht, für welches die Funktion den Wert 0 annimmt. Für das Gleichungssystem wird nun ein Eingabevektor

$x \in \mathbb{R}^n$ gesucht, für welchen die Funktion einen Ausgabevektor mit allen Komponenten gleich Null annimmt:

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) f_2(x_1, \dots, x_n) \dots f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \dots 0$$

Die Approximation der einfachen Gleichung wurde Linearisierung genannt. Für nichtlineare Gleichungssysteme sieht die

Formel für die Linearisierung an der Startnäherung $x^{(n)}$ nahezu gleich aus:

$$f(x) \approx f(x^{(n)}) + Df(x^{(n)}) \cdot (x - x^{(n)})$$

Anstatt der Ableitung $f'(x)$ benötigen wir dabei die Matrix. Diese heißt *Jacobische Matrix* und beinhaltet die partiellen Ableitungen zeilenweise jeder Funktion und spaltenweise jeder Variablen in aufsteigender Reihenfolge bis zum jeweiligen Index n .

$$Df(x^{(n)}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Analog zu dem Verfahren für gewöhnliche Gleichungen wird nun die Approximation genutzt um den Wert x an der Stelle des Nullvektors zu bestimmen. Bei der Umstellung nach x müsste man durch die Jacobi Matrix dividieren, was mathematisch nicht möglich ist. Stattdessen wird mit der Inversen der Jacobi Matrix multipliziert, der unter Matrizen äquivalenten Operation:

$$x = x^{(n+1)} = x^{(n)} - (Df(x^{(n)}))^{-1} f(x^{(n)})$$

Das Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme wäre damit funktionell beschrieben. In der Praxis ist die errechnung der Inversen der Jacobi Matrix jedoch äußerst aufwendig. Die Formulierung wird daher in einen äquivalenten Algorithmus umgeformt:

- **Berechne $\delta^{(n)}$ als Lösung des linearen Gleichungssystems**

$$[8] \quad Df(x^{(n)}) \delta^{(n)} = -f(x^{(n)})$$

$$[8] \quad \bullet \text{ Setze } x^{(n+1)} := x^{(n)} + \delta^{(n)}$$

Konvergenzaussagen

Die Linearisierung der Funktion kommt nicht von woher sondern ist die Entwicklung der Funktion in eine Potenzreihe. Im Falle

des Newton-Verfahrens handelt es sich dabei um das Taylor-Polynoms zweiten Grades an dem Entwicklungspunkt x_0 (die Startnäherung) ohne Restglied. Stellen wir das Taylor-Polynom mit Restglied nach Lagrange dar:

$$0 = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{f''(\xi)}{2} (x-x_0)^2, \quad \xi \text{ liegt zwischen } x \text{ und } x_0$$

... dann lässt sich diese Formel durch Division mit $f'(x_0)$ so umstellen, dass das Restglied wie folgt auf eine Seite gebracht wird:

$$x - x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)} (x-x_0)^2$$

Der rechte Teil des linken Terms entspricht dem Wert x_{n+1} im Newton-Verfahren, welchen wir substituieren:

$$x - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)} (x-x_0)^2$$

Ist nun I ein Intervall um x ohne Nullstelle der Ableitung $f'(x)$ und $m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|$ sowie $M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|$ Schranken für alle Ableitungen von f , dann folgt für alle $x \in I$ die Abschätzung:

$$\left| x - x_{n+1} \right| \leq \frac{M_2}{2m_1} \left| x - x_n \right|^2$$

Dabei ist $\frac{M_2}{2m_1}$ der konstante Faktor in jedem Iterationsschritt. Der Fehler des vorhergehenden Iterationsschrittes also quadratisch größer und somit besitzt das Newton-Verfahren eine quadratische Konvergenz.